

INFLUÊNCIA DA TRUNCATURA EM TRACÇÃO NA ESTABILIDADE EM CONDIÇÕES NÃO DRENADAS DE TÚNEIS SUPERFICIAIS SEM SUPORTE

Influence of tension cut-off on the undrained stability of unsupported shallow tunnels

Armando M. S. Nunes Antão*

RESUMO – O presente trabalho visa estudar a influência da não consideração da resistência à tracção sobre a estabilidade de túneis superficiais escavados em condições não drenadas. No caso presente pretende-se determinar a influência nas condições de estabilidade em que o túnel não tem qualquer espécie de suporte. O estudo é feito utilizando-se uma implementação numérica dos teoremas estático e cinemático da análise limite, considerando o critério de Tresca clássico e o critério de Tresca com truncatura em tracção. Os cálculos são realizados em condição de deformação plana, em que o único carregamento a que o sistema está sujeito é o peso volumico do solo do maciço. A estabilidade é avaliada recorrendo a parâmetro clássico, para o qual são feitas propostas de equações representativas. É feita a análise e comparação entre os resultados obtidos considerando ou não a resistência à tracção, recorrendo aos mecanismos obtidos.

SYNOPSIS – The present study aims to study the influence of considering null tensile strength on the stability of shallow tunnels excavated under undrained conditions. It is intended to determine the influence on the stability conditions in which the tunnel does not have any kind of support. The study is done using a numerical implementation of the static and kinematic theorems of limit analysis, considering the classic Tresca's criterion and the Tresca's criterion with tension cut-off. The calculations are performed under plane strain conditions, where the only load to which the system is subjected is the unit weight of the soil. The stability is evaluated using the classical parameter, for which proposals of representative equations are made. The analysis and the comparison between the results obtained considering or not the tension cut-off is performed, using the obtained mechanisms.

Palavras Chave: túneis superficiais, análise limite, resistência à tracção

Keywords: shallow tunnels, limit analysis, tensile strength

1 – INTRODUÇÃO

O estudo da estabilidade de túneis superficiais em condições não drenadas, e em particular recorrendo à análise limite, tem sido abordado ao longo das últimas décadas tendo em conta diferentes parâmetros do problema. Em particular foram estudadas, numa lista não exaustiva, diversas geometrias - circular (Sloan e Assadi 1993), quadrada (Assadi e Sloan 1991), rectangular (Abbo et al. 2013) ou elíptica (Yang et al. 2015) ou mesmo considerando mais do que um túnel (Sahoo e Kumar 2013;

* Professor Associado, UNIC, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, orcid.org/0000-0003-2835-2780, E-mail: amna@fct.unl.pt

Wilson et al. 2015) - e diferentes distribuições de propriedades para o maciço em que o túnel se inscreve: homogênea, com resistência ao corte não drenada crescendo com a profundidade (Salgueiro 2010; Wilson et al. 2011, 2013), ou até considerando propriedades distribuídas aleatoriamente no maciço (Rantanen 2016; Ali et al. 2017). No entanto, estudos sobre a influência da não resistência à tracção na estabilidade de túneis têm sido praticamente inexistentes, tendo-se apenas conhecimento de aplicações do teorema cinemático da análise limite nos trabalhos de Antão (1997) e Salgueiro (2010).

A não consideração da resistência à tracção pode ter grande influência na estabilidade de algumas estruturas geotécnicas e dependerá das condições geotécnicas e da avaliação que delas fizer o projectista. A título de exemplo, no problema do talude vertical o parâmetro de estabilidade, $\gamma H/c_u$ sendo H a altura do talude, γ o peso volúmico e c_u a resistência ao corte não drenada do maciço, que no caso da consideração da resistência à tracção se situa entre 3,772 (Lyamin e Sloan 2002) e 3,7776 (Pastor et al. 2009), valores obtidos recorrendo aos teoremas estático e cinemático, respectivamente, cai para 2 (Drucker 1953) quando essa resistência não é considerada. Em relação a certas estruturas de suporte flexíveis, Antão et al. (2008) mostraram como a não consideração da resistência à tracção pode influenciar fortemente a sua estabilidade. Michalowski (2017) utilizou a possibilidade da não resistência à tracção no estudo da estabilidade de taludes em condições drenadas e não drenadas, mas neste caso o seu efeito não é tão posto em evidência por, na opinião do autor, Michalowski ter utilizado mecanismos menos adequados que o desejável.

O presente trabalho tem por objectivo responder à questão de se saber qual a influência que a não consideração da resistência à tracção tem (ou não) sobre a estabilidade de um túnel circular escavado em condições não drenadas, sem qualquer tipo de suporte. Adicionalmente propõem-se expressões para a aferição dessa estabilidade.

2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A geometria do problema em apreço é apresentada na figura 1, onde se tem em atenção a simetria do mesmo. Trata-se de um túnel circular, de diâmetro D e cujo topo se encontra à profundidade C .

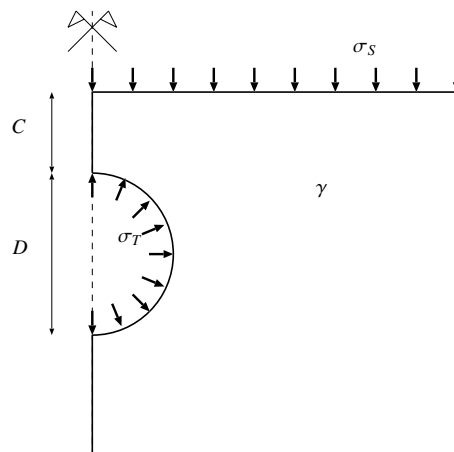


Fig. 1: Geometria e carregamentos de um túnel circular superficial.

Neste tipo de estudos é usual considerar-se a possibilidade de existência de uma carga uniformemente distribuída normal à superfície do terreno, σ_s , e de uma pressão de suporte no túnel, σ_T . A estabilidade deste tipo de obras é normalmente representada pelo parâmetro N , designado por

número de estabilidade, proposto inicialmente por Broms e Bennermark (1967) e definido como:

$$N = \frac{\sigma_S - \sigma_T + \gamma(C + D/2)}{c_u} = \frac{\sigma_S - \sigma_T}{c_u} + \frac{\gamma(C + D/2)}{c_u} \quad (1)$$

Este parâmetro considera que a estabilidade de tais obras não depende dos valores individuais de σ_S e σ_T mas sim da sua diferença. Este facto deve-se à incompressibilidade do meio, usualmente associada às solicitações em condições não drenadas.

É de realçar que no caso da não consideração da resistência à tracção a condição de incompressibilidade deixa de ser obrigatória, podendo haver alterações de volume no maciço, implicando que a assumpção de que a estabilidade depende da diferença entre σ_S e σ_T possa deixar de ser verdadeira. No entanto, no caso em estudo esse problema não se coloca atendendo a que, em termos de carregamento, apenas se procura saber qual o peso volúmico que separa a estabilidade da instabilidade e, por conseguinte, se toma $\sigma_S = \sigma_T = 0$, sendo que o único carregamento considerado é assim o peso volúmico do maciço, γ . O número de estabilidade N toma assim a forma:

$$N = \frac{\gamma(C + D/2)}{c_u} = \frac{\gamma D}{c_u} (C/D + 1/2) \quad (2)$$

Como usual nos estudos recorrendo à teoria da análise limite, o material é suposto ter um comportamento rígido perfeitamente plástico, em que a definição da entrada em plasticidade é feita recorrendo-se a funções de cedência, que devido à plasticidade perfeita do material são apelidadas de critérios de ruptura.

No caso presente a resistência do maciço é modelada recorrendo a dois critérios de ruptura: no caso habitual, o critério de Tresca, dito clássico (CTC), no caso da modelação da não existência de resistência à tracção, o critério de Tresca truncado à tracção (CTT). A figura 2 representa graficamente estes critérios no plano (σ, τ) , considerando a convenção de sinais da Mecânica dos Solos. Nos dois casos apresenta-se o círculo de Mohr representativo de um mesmo estado de tensão. No caso do critério de Tresca clássico, e apesar de existir tracção, esse estado de tensão é admissível atendendo a que não esgota a resistência ao corte não drenada do material, designada por c_u . No lado direito da mesma figura apresenta-se o critério de Tresca truncado em tracção, em que o valor da truncatura é dado por $T.T.$, que no presente trabalho foi considerado como sendo igual a $10^{-7}c_u$, ou seja, do ponto de vista prático, nulo. O mesmo estado de tensão, apesar de estar longe de esgotar a resistência ao corte não drenada, deixa de ser admissível atendendo à existência de valores de tensões em tracção inferiores ao valor da truncatura.

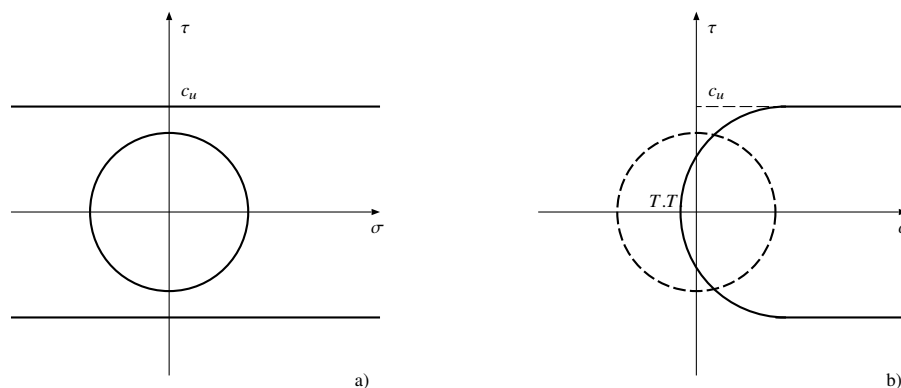


Fig. 2: Critério de Tresca Clássico a) e Critério de Tresca truncado em tracção b).

3 – METODOLOGIA DE CÁLCULO

Os cálculos foram efectuados recorrendo à plataforma de cálculo *mechpy*, que implementa numericamente os teoremas cinemático e estático da análise limite. Esta plataforma tem sido desenvolvida desde há alguns anos por membros do Departamento de Engenharia Civil da FCT/UNL.

A plataforma baseia-se no Método dos Elementos Finitos e entre outros problemas (elasticidade, elasticidade-não linear, elasto plasticidade, escoamentos em regime permanente, fractura) permite determinar automaticamente aproximações superiores (teorema cinemático ou da região superior-TRS) e inferiores (teorema estático ou da região inferior- TRI) da carga de colapso de uma dada estrutura mecânica.

A aplicação do teorema estático necessita que se obtenha uma distribuição de tensões no maciço que equilibre os carregamentos exteriores e que seja plasticamente admissível. Se isso for possível então a carga aplicada é suportável pelo maciço. Isso leva a que seja interessante conseguir-se obedecer a estas condições com um carregamento da maior magnitude possível. Tendo em atenção os carregamentos a que o maciço está sujeito, este problema pode ser formulado do ponto de vista matemático como:

$$\max \quad \alpha \quad (3a)$$

$$\text{respeitando } D\sigma + \alpha b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3b)$$

$$N\sigma = 0 \quad (3c)$$

$$f(\sigma) \leq 0 \quad (3d)$$

em que D é o operador diferencial de equilíbrio, σ está escrita em notação vectorial, b contém os carregamentos de massa, N contém as componentes da normal unitária exterior na fronteira do maciço. No caso bidimensional, e com o referencial usual do plano, estas grandezas escrevem-se como:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma \end{Bmatrix}, N = \begin{bmatrix} n_x & \cdot & n_y \\ \cdot & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

A função $f(\sigma)$ define o critério de ruptura a empregar. Tomando em consideração as tensões principais devidamente ordenadas ($\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$) e a convenção de sinais da Mecânica dos Solos, esta função escreve-se, no caso do critério de Tresca como:

$$f(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2c_u \quad (4)$$

e no caso do critério de Tresca truncado em tracção como:

$$f(\sigma) = \max \{ \sigma_I - \sigma_{III} - 2c_u; -\sigma_{III} + T.T. \} \quad (5)$$

No caso do teorema cinemático, caso se estabeleça um campo de velocidades virtual em que a potência dissipada pelo carregamento nesse campo seja igual ou superior à potência dissipada plasticamente pelo material, então esse carregamento não é suportável pela estrutura. Isto leva a que seja interessante minimizar a diferença entre a potência dissipada e a potência fornecida pelo carregamento exterior. O carregamento exterior tem habitualmente duas componentes: uma que se pretende otimizar e outra considerada fixa. No caso presente esta segunda componente não existe.

Tendo em conta que a potência fornecida pelo carregamento exterior que se pretende otimizar é usualmente normalizada à unidade, há que resolver o seguinte problema matemático:

$$\min \quad \alpha(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega \quad (6a)$$

$$\text{respeitando} \quad W(\dot{\mathbf{u}}) = 1 \quad (6b)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_u \quad (6c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} \quad \text{em} \quad \Omega \quad (6d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in C_c \quad (6e)$$

onde \mathbf{u} é o vector deslocamento, $\dot{\mathbf{u}}$ o vector velocidade, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a taxa de deformação, \mathbf{D}^* o operador de compatibilidade (que, matricialmente, se pode obter “transpondo” o operador de equilíbrio \mathbf{D}) e Γ_u a componente da fronteira do maciço em que se considera deslocamento nulo. Na equação 6a, $\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ é a densidade de dissipação plástica, na equação 6b impõe-se a normalização da potência fornecida pelas forças exteriores a otimizar. Finalmente a condição 6e traduz a verificação da plasticidade associada que impõe que o vector de deformação plástica tenha direcção perpendicular à superfície do critério de ruptura.

Os teoremas da análise limite são assim formulados como problemas de optimização. Em ambos os casos utiliza-se o método de direcção alternada de multiplicadores, *MDAM*, no processo de optimização (Boyd et al. 2010). Os problemas de minimização obtidos têm ambos natureza não linear, mas o *MDAM* permite fazer com que a componente não linear da optimização seja efectuada ao nível do elemento finito, e por conseguinte ser efectuada sobre um número muito reduzido de variáveis.

As malhas de elementos finitos utilizadas nos cálculos do teorema estático e do teorema cinemático são, no que à divisão espacial diz respeito, iguais. No caso do teorema cinemático as aproximações das velocidades são quadráticas e as das velocidade de deformação lineares. No caso do teorema estático as tensões são aproximadas linearmente em cada elemento. Na figura 3 apresenta-se um exemplo de malha para o caso de $C/D=3$. As malhas utilizadas são bastante mais refinadas: o tamanho dos elementos é proporcional ao dos apresentados nessa figura mas considerando um número de divisões na parede do túnel igual a quatro vezes o apresentado. Em termos de condições limite de deslocamento no caso do teorema cinemático estes são bloqueados nas duas direcções na fronteira inferior e direita enquanto que na superfície de simetria apenas se bloqueiam os deslocamentos horizontais. No caso do teorema estático considera-se que na superfície do terreno e da fronteira do túnel as tensões normais e as tensões tangenciais são impostas como sendo zero enquanto que sobre o eixo de simetria apenas se impõe tensão tangencial nula. Nas fronteiras inferior e lateral esquerda duas possibilidades se colocam: ou se admite que as tensões podem ser quaisquer, conquanto não violem o critério de plasticidade, ou se procede ao espalhamento das tensões para o restante do meio semi-infinito, recorrendo aos chamados elementos de extensão. A utilização destes elementos permite garantir que a aproximação fornecida pelo teorema estático é estrita para o caso do túnel escavado em meio semi-infinito. Na prática, se as fronteiras estiverem suficientemente afastadas do túnel não há diferença a registar entre os resultados dos dois tipos de fronteira. No presente caso as malhas utilizadas verificam sempre esta condição.

Não sendo objectivo do presente trabalho a descrição exaustiva dos métodos utilizados nem das suas implementações numéricas, o leitor interessado pode consultar os trabalhos de Vicente da Silva

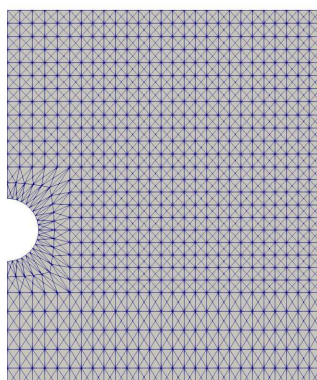


Fig. 3: Exemplo de malha de elementos finitos para o caso $C/D=3$.

(2009) e de Deusdado (2018) para obter literatura em Português sobre as implementações numéricas utilizadas dos teoremas cinemático e estático, respectivamente.

4 – RESULTADOS

Os cálculos efectuados correspondem às profundidades relativas de $C/D=0,25, 0,50, 1,00, 2,00, 3,00, 4,00$ e $5,00$ que se consideram abranger as geometrias de um túnel usualmente designado por superficial. Os resultados dos cálculos efectuados são apresentados no Quadro 1. A primeira constatação a fazer é que, tanto para o caso de resultados obtidos com o CTC como no dos obtidos com o CTT, as aproximações inferiores da carga de colapso, designadas por N_{TRI} , e as superiores, designadas por N_{TRS} , são praticamente coincidentes. Isto significa que, do ponto de vista prático, o número de estabilidade definindo as condições dos túneis auto suportáveis está estabelecido. Para valores de N inferiores, o túnel pode existir, dentro das condições enunciadas, sem suporte. Ao contrário, para casos em que N seja superior ao apresentado, o colapso do túnel, se construído sem suporte, ocorrerá.

Quadro 1: Resultados obtidos

C/D	N_{TRI} CTT	N_{TRS} CTT	N_{TRI} CTC	N_{TRS} CTC
0,25	1,96	1,98	2,28	2,30
0,5	2,31	2,34	2,54	2,56
1	2,85	2,87	3,01	3,03
2	3,63	3,65	3,75	3,77
3	4,20	4,22	4,32	4,33
4	4,66	4,67	4,76	4,78
5	5,03	5,04	5,13	5,15

A segunda constatação é a de que a influência da não consideração da resistência à tracção no número de estabilidade N é praticamente constante ao longo da profundidade. Na realidade, apenas para os túneis muito superficiais existe uma influência um pouco mais importante. No entanto, apesar de pouco importante, ela existe mesmo para as profundidades relativas mais elevadas.

Na figura 4 representam-se os resultados obtidos. É, também, graficamente, evidente a proximidade entre os resultados do teorema estático (TRI) e cinemático (TRS), não se conseguindo, praticamente, fazer a distinção entre resultados. Por outro lado a influência da não consideração da

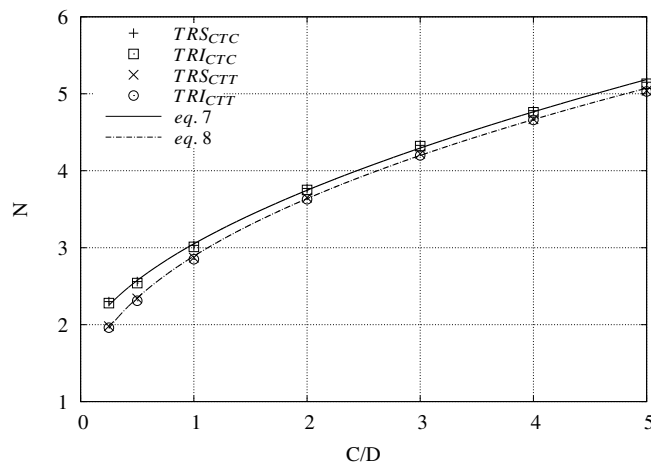


Fig. 4: Evolução do número de estabilidade N com a profundidade relativa C/D .

resistência à tracção manifesta-se para todas as profundidades, mas com um pouco mais de relevo nas profundidades relativas mais baixas.

Devido à proximidade entre os resultados oriundos dos teoremas cinemático e estático, foi procurada uma função de aproximação desses resultados, para cada um dos critérios utilizados. Depois de várias tentativas a escolha recaiu sobre funções de potência. No caso dos resultados provindos da utilização do CTC a função que melhor aproxima os resultados tem por equação:

$$N_{CTC} = 1,50 \left(\frac{C}{D} \right)^{0,55} + 1,55 \quad (7)$$

enquanto no caso dos resultados obtidos com o CTT a equação da função deste tipo que melhor aproxima os resultados é:

$$N_{CTT} = 1,99 \left(\frac{C}{D} \right)^{0,46} + 0,90 \quad (8)$$

Com base nestas equações pode-se quantificar a influência da não consideração da resistência à tracção na estabilidade: nos túneis mais superficiais a influência da não consideração da resistência à tracção traduz-se num decréscimo de cerca de 13% do número de estabilidade N . Este decréscimo baixa para cerca de 5% para $C/D = 1$ e estabiliza por volta dos 2 a 3 por cento para os valores de C/D superiores a 2,0.

Na figura 4 são também representadas estas equações, que aproximam muito razoavelmente os valores obtidos nos cálculos. Sob as hipóteses descritas estas equações podem ser utilizadas para a definição das condições de auto sustentação em condições não drenadas de túneis superficiais.

Na figura 5 apresentam-se as malhas deformadas e as taxas de dissipação plástica para três diferentes profundidades relativas: $C/D=0,5$; 3,0 e 5,0, para os casos dos critérios de Tresca clássico (lado esquerdo) e Tresca truncado em tracção (lado direito). Estas figuras foram obtidas com a implementação numérica do teorema cinemático. Em cada uma das profundidades relativas as escalas da deformação e da dissipação plástica são iguais para os cálculos realizados com os dois critérios. No entanto, e devido à normalização da potência das forças exteriores, a magnitude das velocidades difere razoavelmente entre cada caso o que impede que se utilize a mesma escala para todos os casos, por uma questão de visualização.

Constata-se que as zonas em deformação se concentram na zona superior do túnel para as profundidades relativas mais baixas e que, com o aumento da profundidade, as zonas em deformação

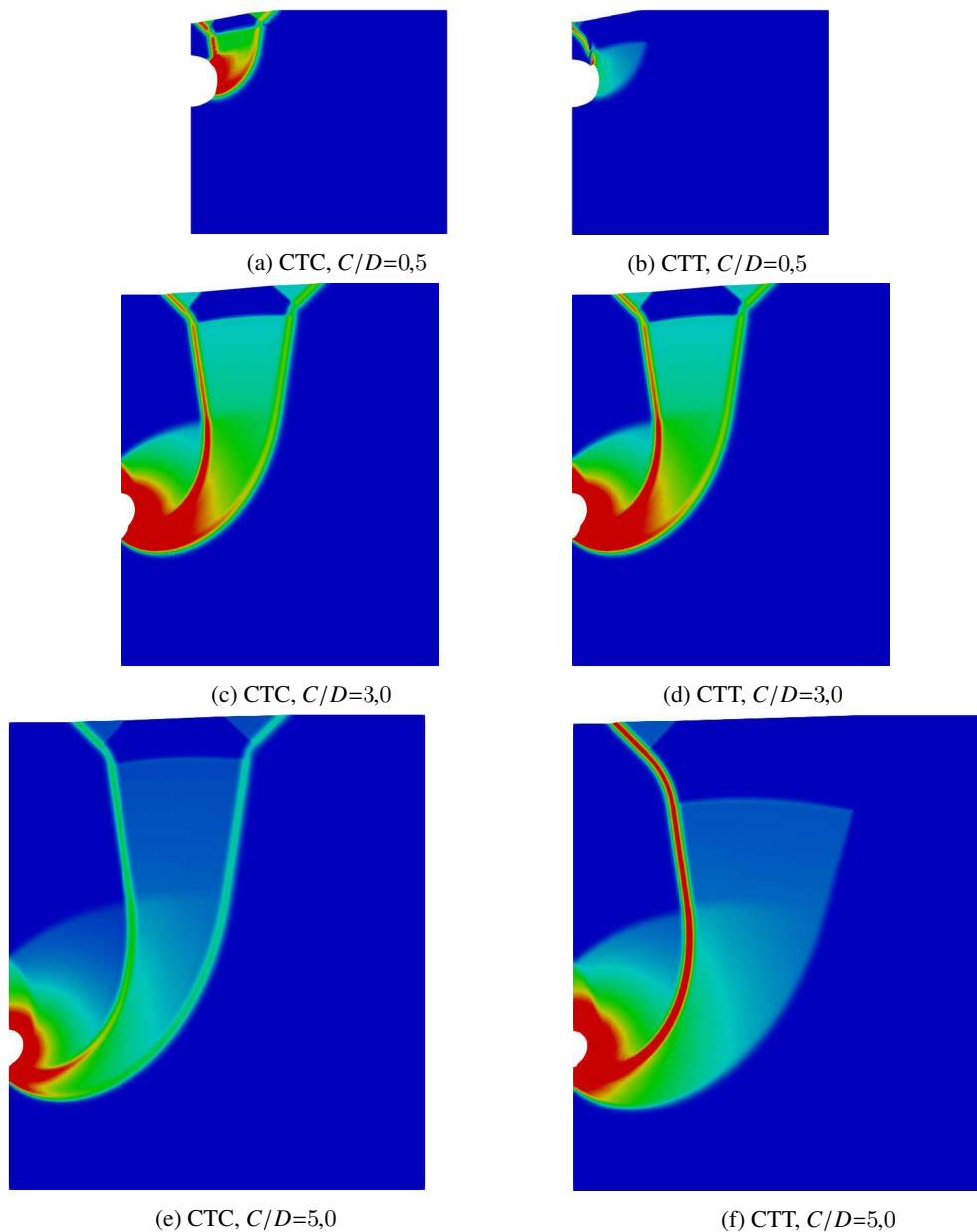


Fig. 5: Malha deformada e dissipação plástica para diferentes valores de profundidade relativa, obtidas com o CTC e o CTT

vão-se deslocando para zonas inferiores ao túnel. Em qualquer dos casos existe sempre uma zona situada por cima do túnel que se desloca verticalmente como um bloco rígido.

A influência da não resistência à tracção traduz-se, fundamentalmente, pelo desaparecimento de uma zona de dissipação superficial existente quando o solo tem a possibilidade de resistir à tracção. Efectivamente, o mecanismo obtido nos casos realizados utilizando o CTC é coroado à superfície por duas zonas praticamente triangulares. A zona triangular da direita é composta por tracções na

direcção aproximadamente horizontal. Com a perda da possibilidade de resistência à tracção esta zona desaparece deixando de contribuir para a dissipação de energia feita internamente pelo material o que se traduz num menor número de estabilidade. Para além da perda da zona de dissipação referida, há um ligeiro alargar da zona lateral que se encontra em dissipação, quando se passa dos mecanismos obtidos com o CTC para os obtidos com o CTT.

Genericamente pode-se dizer que o mecanismo de ruptura é pouco alterado na sua extensão, o que justifica também a alteração relativamente modesta operada no número de estabilidade. Na realidade o efeito de arco que se desenvolve sobre o túnel leva a que poucas zonas do solo entrem em regime de tracção.

Na figura 6 apresenta-se pormenor da malha deformada e da dissipação plástica para o caso $C/D = 3,0$ e cálculos realizados recorrendo ao CTT. Esta malha é a mesma que a apresentada na figura 3 e portanto com refinamento muito inferior ao das utilizadas nos cálculos dos valores do número de estabilidade. Permite no entanto verificar que à superfície, onde no caso da utilização do CTC existia uma zona triangular de dissipação, os elementos da malha se encontram alongados horizontalmente, sem terem conservado o seu tamanho como a condição de incompressibilidade obrigaria.

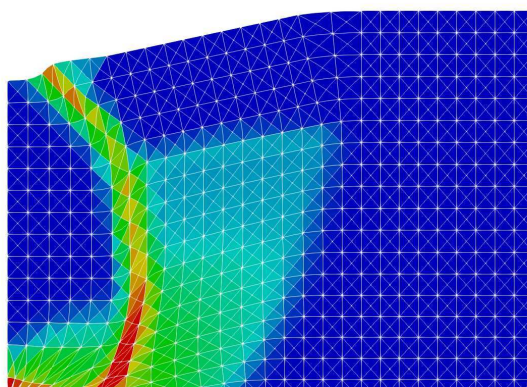


Fig. 6: Pormenor da malha deformada e dissipação plástica para o caso $C/D = 3,0$ e CTT.

5 – CONCLUSÕES

O trabalho apresenta os resultados obtidos para o número de estabilidade N no caso em que um túnel superficial solicitado em condições não drenadas não tem qualquer espécie de suporte. Este parâmetro foi calculado para duas situações: no caso em que o maciço tem resistência à tracção infinita ou no em que não tem nenhuma resistência à tracção. Com os resultados obtidos foram propostas duas equações aproximando o número de estabilidade N , para as condições previamente estabelecidas. Estas equações, por aproximarem soluções resultantes dos teorema estático e cinemático muito próximas entre si, definem o valor do número de estabilidade correspondente à auto-sustentação de túneis circulares superficiais, em condições não drenadas e permitem verificar que, em geral, a influência da não consideração à tracção é pouco significativa na estabilidade de túneis superficiais sem suporte, em condições não drenadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abbo, A. J., Wilson, D. W., Sloan, S. W., e Lyamin, A. V. (2013). *Undrained stability of wide rectangular tunnels*. Computers and Geotechnics, 53, pp. 46 – 59.
- Ali, A., Lyamin, A., Huang, J., Sloan, S., e Cassidy, M. (2017). *Undrained stability of a single circular tunnel in spatially variable soil subjected to surcharge loading*. Computers and Geotechnics, 84, pp. 16 – 27.
- Antão, A., Guerra, N. C., Matos Fernandes, M., e Cardoso, A. (2008). *Influence of tension cut-off on the stability of anchored concrete soldier-pile walls in clay*. Canadian Geotechnical Journal, 45(7), pp. 1036–1044.
- Antão, A. N. (1997). *Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée*. Tese de Doutoramento, L'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- Assadi, A. e Sloan, S. W. (1991). *Undrained stability of shallow square tunnel*. Journal of Geotechnical Engineering, 117(8), pp. 1152–1173.
- Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B., e Eckstein, J. (2010). *Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers*. Foundations and Trends in Machine Learning, 3(1), pp. 1–122.
- Broms, B. B. e Bennermark, H. (1967). *Stability of clay in vertical openings*. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, American Society of Civil Engineers, 93(SM1), pp. 71–94.
- Deusdado, N. A. (2018). *Método do Lagrangeano Aumentado aplicado ao desenvolvimento de Formulações de Elementos Finitos para Análise Limite*. Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.
- Drucker, D. C. (1953). *Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems*. Journal of the Mechanic and Physics of Solids, 1(4), pp. 217–226.
- Lyamin, A. V. e Sloan, S. W. (2002). *Lower bound limit analysis using non-linear programming*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 55(5), pp. 573–611.
- Michalowski, R. L. (2017). *Stability of intact slopes with tensile strength cut-off*. Géotechnique, 67(8), pp. 720–727.
- Pastor, F., Loute, E., e Pastor, J. (2009). *Limit analysis and convex programming: A decomposition approach of the kinematic mixed method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 78(3), pp. 254–274.
- Rantanen, T. L. (2016). *Influência da variabilidade das propriedades do solo na estabilidade de túneis superficiais em maciços respondendo em condições não drenadas*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- Sahoo, J. P. e Kumar, J. (2013). *Stability of long unsupported twin circular tunnels in soils*. Tunneling and Underground Space Technology, 38, pp. 326 – 335.
- Salgueiro, A. (2010). *Aplicação do teorema cinemático da análise limite ao cálculo da estabilidade de túneis escavados em solos em condições não drenadas*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

- Sloan, S. W. e Assadi, A. (1993). *Stability of shallow tunnels in soft ground*, Predictive soil mechanics, pp. 644–663. ed. G. T. Houlsby and A. N. Schofield, Thomas Thelford.
- Vicente da Silva, M. (2009). *Implementação Numérica Tridimensional do Teorema Cinemático da Análise Limite*. Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.
- Wilson, D. W., Abbo, A. J., Sloan, S. W., e Lyamin, A. V. (2011). *Undrained stability of a circular tunnel where the shear strength increases linearly with depth*. Canadian Geotechnical Journal, 48(9), pp. 1328–1342.
- Wilson, D. W., Abbo, A. J., Sloan, S. W., e Lyamin, A. V. (2013). *Undrained stability of a square tunnel where the shear strength increases linearly with depth*. Computers and Geotechnics, 49, pp. 314 – 325.
- Wilson, D. W., Abbo, A. J., Sloan, S. W., e Lyamin, A. V. (2015). *Undrained stability of dual square tunnels*. Acta Geotechnica, 10(5), pp. 665–682.
- Yang, F., Zhang, J., Yang, J., Zhao, L., e Zheng, X. (2015). *Stability analysis of unlined elliptical tunnel using finite element upper-bound method with rigid translatory moving elements*. Tunnelling and Underground Space Technology, 50, pp. 13 – 22.